ANÁLISIS ARMÓNICO Y GRUPOS

RAÚL QUIROGA-BARRANCO

Resúmen

Comenzamos repasando la integral de Riemann como punto de partida para definir la integral de Lebesgue. Para ello se consideran los conjuntos de Borel en $\mathbb{R}^n$ sobre los cuales definiremos la medida de Lebesgue.

La medida de Lebesgue es invariante bajo las traslaciones dadas por la suma en $\mathbb{R}^n$. Salvo una constante multiplicativa, la medida de Lebesgue es la única con tal propiedad. Es decir, salvo normalización, depende solamente de la estructura de grupo de $(\mathbb{R}^n, +)$. Se presenta una demostración resumida de este hecho.

Se definen los espacios de funciones integrables $L^1(\mathbb{R}^n)$ y $L^2(\mathbb{R}^n)$ usando la medida de Lebesgue. Enfatizando la estructura de grupo de $\mathbb{R}^n$ se introducen diversas construcciones del análisis armónico: convolución y transformada de Fourier, entre otras. Discutiremos algunas propiedades de tales construcciones como el Teorema de Plancherel y la Fórmula de Inversión.

Finalmente, se plantean construcciones similares para otros grupos como el círculo $\mathbb{T}$ en el plano complejo, el grupo multiplicativo $\mathbb{R}_+$ de números reales positivos y algunos grupos de matrices.

Temario

1. Las integrales de Riemann y de Lebesgue. La medida de Lebesgue.
2. Los espacios de funciones $L^1(\mathbb{R}^n)$ y $L^2(\mathbb{R}^n)$.
3. Convoluciones y transformadas.
4. Integrales y espacios sobre $\mathbb{T}$ y $\mathbb{R}_+$.
5. Grupos y medidas de Haar.
6. Análisis en grupos compactos.

Centro de Investigación en Matemáticas, Apartado Postal 402, Guanajuato, Guanajuato, 36250, Mexico

Email address: quiroga@cimat.mx